MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 2:

1. Ukažte, že platí (A,B,C jsou množiny) :

   a) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$
   b) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

2. Je dáno zobrazení $f:A\to B$ a $M,M_i\subseteq A$, $N,N_i\subseteq B$, $(i=1,2)$;
   označme $f(M)=\{b\in B;\exists a\in A: f(a)=b\}$ a $f^{-1}(N)=\{a\in A; f(a)\in N\}$.
   Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a pokud některé neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro která tvrzení platí:
   a) $f(M_1\cup M_2)=f(M_1)\cup f(M_2)$;
   b) $f(M_1\cap M_2)=f(M_1)\cap f(M_2)$;
   c) $\forall M\subseteq A: f^{-1}(f(M))=M$;
   d) $\forall N\subseteq B: f(f^{-1}(N))=N$.

3. Zopakujte si princip důkazu matematickou indukcí a dokažte (užitím matematické indukce) :

   a) Je-li $q\neq 1, n\in N$, pak $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
   b) Pro $n\in N, n\neq 3$ platí $2^n \geq n^2$.

4. Najděte (v R) supremum, infimum, maximum, minimum (pokud existují) následujících množin (a vaše tvrzení ověřte) :

   a) $M_1=\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}; n\in N\right\}$; b) $M_2=\left\{\dfrac{n-1}{n}; n\in N\right\}$; c) $M_1=\left\{2^{-n}+3^{-n}; n\in N\right\}$.

A chcete-li, můžete zkusit i

5. Ukažte, že pro neprázdné množiny A,B reálných čísel platí: $(\forall a\in A\ \forall b\in B: a\leq b)\Rightarrow(\sup A\leq \inf B)$.

6. Nechť podmnožiny A,B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin $A\cup B$ a $A\cap B$. „Vaše“ tvrzení dokažte !